RÉDUCTION DE DIMENSION ET OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE.

NOUREDDINE BOUMLAIK

1 DÉFINITION DE PROBLÈME:

Nous avons un panier de **d** actifs, pour un historique de **n** dates, ce qui nous donne une matrice **Y** de taille $\mathbf{n} \times \mathbf{d}$, qui se compose des $y_{i,t}$ pour $i = \{1, \dots, d\}$ et $t = \{1, \dots, n\}$. Nous souhaitons construire un portefeuille diversifié, il existe plusieurs méthodes d'optimisation pour définir les poids des actifs, on peut citer le portefeuille minimum variance (MV) qui consiste à minimiser la variance, le portefeuille diversifier (MDP) qui maximise le ratio de Sharp, le portefeuille ERC, etc. Pour obtenir la solution optimale il faut résoudre un programme d'optimisation, en général le problème, appelé ϕ problème ou problème d'optimisation de Markowitz, s'éxprime de la façon suivante:

$$\begin{aligned} &\underset{x}{\text{minimiser}} && f(x) = \frac{1}{2}x^T\Sigma x - \gamma x^T R \\ &\text{sous contraintes} && -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } \mathbf{1}^T x = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Avec $\gamma = \frac{1}{\phi}$ et ϕ est l'aversion au risque. On peut remarquer que quand $\phi = \infty$ on obtient le portefeuille MV. Σ de dimension $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ est la matrice de var-covariance, Et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T$ vecteur des poids, $\mathbf{R} = (r_1, \dots, r_d)^T$ vecteur des rendements.

Pour résoudre ce problème d'optimisation, nous avons besoin d'estimer la matrice var-covariance $\hat{\Sigma}$, ainsi que les rendements prospectifs $\hat{R}$. Si **n** est trés grand, l'estimation de $\hat{\Sigma}$ peut être lourd, c'est pour cela nous allons essayer de réduire la dimension de la matrice Y avant de résoudre le problème 1.

2 NONNEGATIVE MATRIX FACTORIZATION:

La NMF (Nonnegative matrix factorization), est une méthode de réduction de dimension, qui est semblable à la PCA, la NMF se distingue des autres méthodes de travailler sur des matrices non négatives.

La NMF propose de résoudre la problématique suivante:

Problématique 1. *Soit* Y *une matrice non négative d'une dimension* $d \times n$ *(*n *nombre de de date et* d *nombre d'actifs), il existe une matrice* W *et* B *non négative, d'une dimension respectivement,* $d \times r$ *et* $r \times n$ *avec* $r \leqslant \mathrm{Min}(d, n)$*. On cherche:*

$$Y = WB + E \tag{2}$$

Avec E *le terme d'erreur et de la même taille que* Y*. On peut écrir* $X = B^T$ *avec* X *de taille* $n \times r$*, la matrice des facteurs, et* W *la matrice des poids, finalement pour trouver* X *et* W *on cherche la solution de problème d'optimisation suivant:*

$$\begin{aligned} &\textit{minimiser} && \mid Y - WB \mid^2 \\ &\textit{sous contraintes} && 0 \leqslant W \textit{ et } 0 \leqslant B \end{aligned} \tag{3}$$

3 SHRINKAGE:

Mathématiquement, la méthode de Shrinkage consiste à réduire le rapport entre la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice de covariance empirique. Il peut être fait en déplaçant simplement toute les valeurs propres selon un décalage donné, ce qui est équivalent à trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance I2-pénalisée de la matrice de covariance. Dans la pratique, le retrait se résume à une simple transformation convexe, comme suivant:

$$\Sigma_{\mathrm{Shrunk}} = (1-\alpha)\hat{\Sigma} + \alpha \frac{\mathrm{Tr}\hat{\Sigma}}{p} \mathrm{Id} \tag{4}$$

avec α le paramètre de Shrinkage, plus il est grand plus on lisse les valeurs propres, $\hat{\Sigma}$ la matrice de covariance avant traitement, Σ_{Shrunk} la matrice après traitement et p le nombre des valeurs propres.

4 APPLICATION:

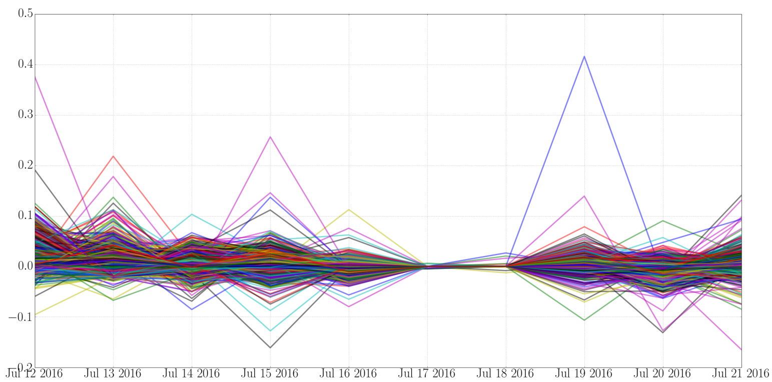

Figure 1: Coubres des rendements

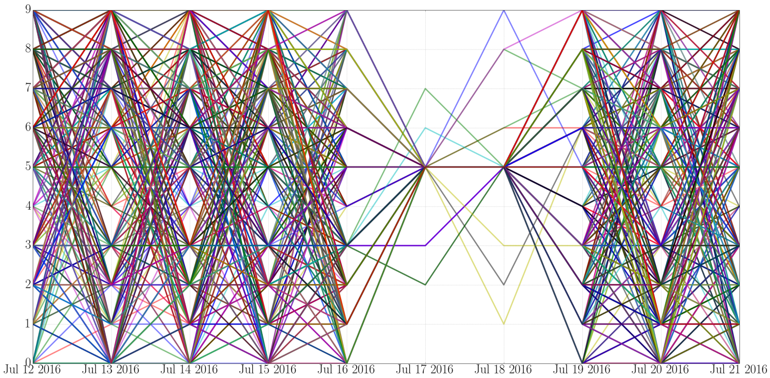

Figure 2: Coubres des rendements discritisés

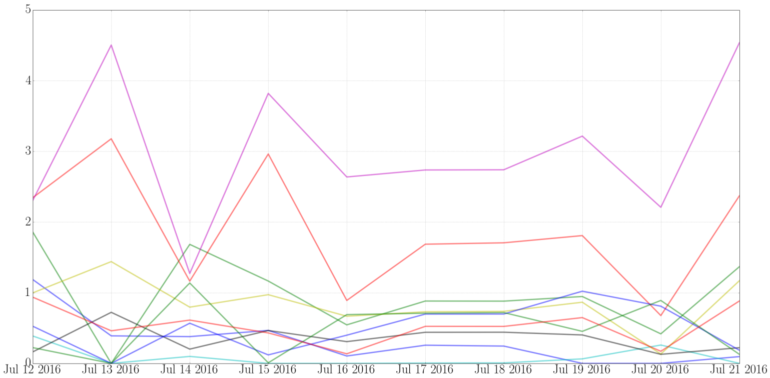

Figure 3: Courbes des facteurs

Nous avons travaillé sur un univers de 1600 actions sur la période de 2009 à 2016, nous avons choisi de travailler sur les rendements des prix, et comme la NMF travaille que sur des valeurs positives, nous avons donc discritisé les rendement sur 10 niveau de 0 à 9. Figure 1 et 2. Pour l'application de la NMF, nous avons choisi 10 facteurs ($r = 10$), sur la Figure 3 nous observons l'évolution de différent facteur.

Donc un rendement Y_t à l'instant t peut s'écrire comme suivant :

$$Y_{t,i} = \sum_{j=1}^{10} w_{i,j} B_{t,j} \tag{5}$$

Avec $w_{i,j}$ est le poids de rendement i dans le facteur B_j à l'instant t avec $i = \{1, \dots, 1600\}$ et $j = \{1, \dots, 10\}$.

4.1 Le portefeuille de minimum variance (MV):

Comme nous l'avons déjà défini précédemment dans le programme d'optimisation 1, pour avoir le portefeuille MV l'aversion au risque doit être égale à zéro $\phi = \infty$. Nous allons donc essayer de construire un portefeuille MV en calculant la matrice de var-covariance à partir des facteurs obtenu pas la NMF, une fois qu'on à les poids des facteurs qui minimise la variance, le passage aux poids des actifs ce fait comme suivant:

$$w_{t,i}^{a} = \sum_{j=1}^{10} w_{i,j}^{mv} w_{t,j}^{nmf} \tag{6}$$

Avec $w^{a}_{t,i}$ le poids de l'actif i et $w^{mv}_{i,j}$ le poids de facteur j obtenu par l'optimiseur et $w^{nmf}_{t,j}$ le poid de facteur j dans l'actif i. Nous avons utilisé dans l'optimisation une matrice de var-covariance historique des facteurs, avec des contraintes que la somme des poids doit être égale à 1 et sans effet de levier.

Résultat:
Dans le graphe 4 on à les poids $w^{mv}_{i,j}$, la matrice de var-covariance est calculée sur un historique d'un an glissant, et la NMF sur tout l'historique. Dans le tableau 1 et le graphe 5 n'avons les résultats pour les portefeuilles minimum variance en utilisant la NMF et Shrinkage -$\alpha = 90\%$-, le portefeuille équipondéré en poids et en capitalisation boursière. On constate que le meilleur Sharp est celui de de MV avec la méthode de Shrinkage.

Dans le figure 6 on a simulé plusieurs portefeuille en changement la valeur de α pour la méthode de Shrinkage, sur un intervalle de [0100] avec un pas de 5, on constate qu'a partir de $\alpha = 90\%$ le Sharp commence à diminué.

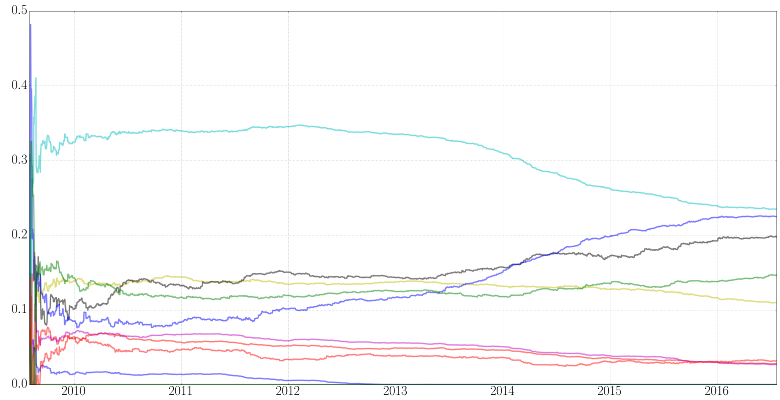

Figure 4: Les poids de l'optimisation pour les facteurs

Figure 5: Les NAV des backtests

Table 1: Les statistiques pour le Figure 5

	Mu	Vol	Sharp
MV NMF	19.26	10.68	1.80
EW	19.06	13.49	1.41
EWM	13.07	13.90	0.94
MV Shrunk90	9.51	4.85	1.96

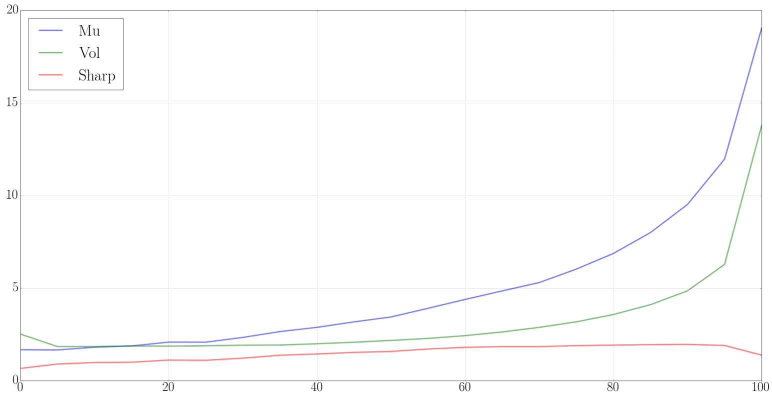

Figure 6: L'évolution de Sharp et le rendement et la volatilité en fonction de α pour Shrinkage

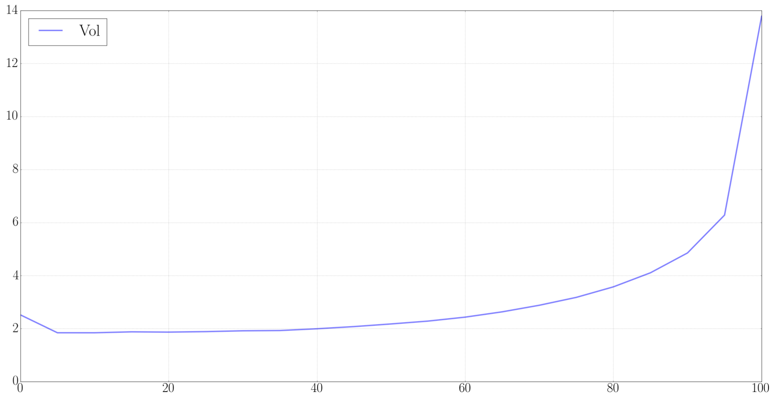

Figure 7: L'évolution de la volatilité en fonction de α pour Shrinkage

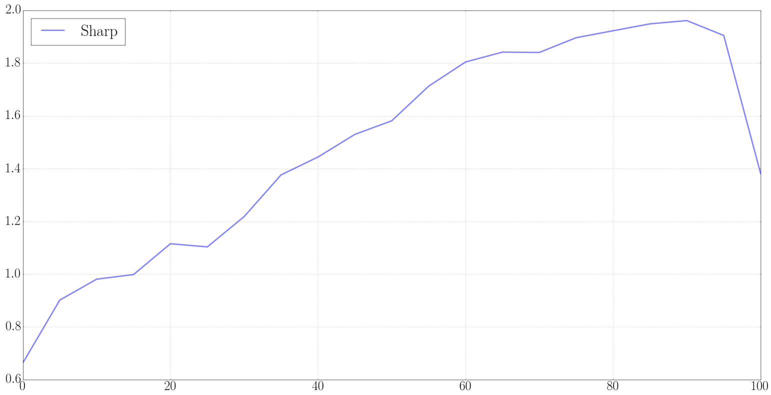

Figure 8: L'évolution de Sharp en fonction de α pour Shrinkage

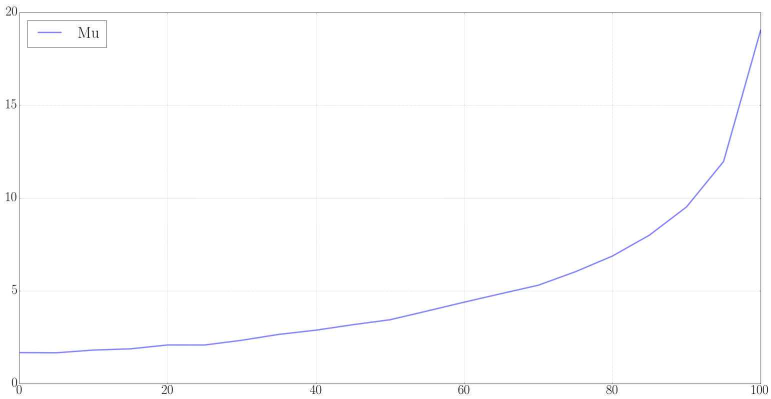

Figure 9: L'évolution de rendement en fonction de α pour Shrinkage